Über die Faktorisation von Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged (Ungarn) und N. ITÔ in Nagoya (Japan).

Sind $H_1, H_2, \ldots$ echte Untergruppen einer Gruppe G und gilt $G = H_1 H_2 \ldots$, so nennt man die rechte Seite dieser Gleichung eine Faktorisation von G mit den Faktoren $H_1, H_2, \ldots$. Die Faktorisation nennen wir symmetrisch, wenn $H_{1'} H_{2'} \ldots = H_1 H_2 \ldots$ für jede Permutation $1', 2', \ldots$ von $1, 2, \ldots$ gilt. Im Falle zweier Faktoren (und auch im Falle mehrerer Faktoren, wenn die Faktoren paarweise vertauschbar sind [1]) hat sich mit solchen Faktorisationen in den letzten zwei Jahrzehnten eine ganze Reihe von Arbeiten beschäftigt.

N. ITÔ [2] hat bewiesen, daß nicht jede endliche einfache Gruppe eine Faktorisation mit zwei Untergruppen hat. Es ist also um so mehr wünschenswert die obigen Faktorisationen mit mehreren Untergruppen allgemein zu untersuchen.

Zunächst beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Es sei G eine Gruppe und H eine echte Untergruppe von G. Es seien $\{H_\chi\}$ die sämtlichen Konjugierten von H in G, wo χ irgendeine wohlgeordnete Indizesmenge I durchläuft. Dann ist das Produkt $\prod_\chi H_\chi = H_1 H_2 \ldots$ eine Untergruppe von G.*

Bemerkung. Aus diesem Satz folgt auf triviale Weise, daß die Untergruppe $\prod_\chi H_\chi$ der kleinste die Gruppe H enthaltende Normalteiler von G ist, also ist die Faktorisation $\prod_\chi H_\chi$ symmetrisch.

Beweis. Es sei $x = h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$ $(\alpha, \beta, \ldots, \varrho \in I)$ ein Element von G derart, daß h_ν zu H_ν gehört $(\nu = \alpha, \beta, \ldots, \varrho)$. Zunächst definieren wir die zwei elementaren Umformungen:

1) Sind h_σ, h_τ zwei benachbarte Faktoren in $h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$ derart, daß beide zu H_μ gehören, so ersetzen wir $h_\sigma h_\tau$ durch das ihm gleiche Element h'_μ von H_μ.

2) Es sei H_μ eine Gruppe $(\mu \in I)$ mit kleinstem Index, für welche $h_\sigma \in H_\mu$ (h_σ ein Faktor in $h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$) gilt. Gilt $\mu < \sigma$, so ersetzen wir h_σ durch das ihm gleiche Element h''_μ von H_μ.

Wir nennen ein Produkt $h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$ ein reduziertes Produkt, wenn man in diesem keine elementare Umformung ausführen kann. Es ist klar, daß man jedes Produkt $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ in endlich vielen Schritten in ein reduziertes Produkt umformen kann.

Es sei $x = h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ ein reduziertes Produkt. Es bezeichne r die Anzahl der Faktoren in diesem Produkt und es sei $l(x) = \min r$. Wir nennen das betrachtete reduzierte Produkt ein minimales reduziertes Produkt, wenn die Anzahl der Faktoren in $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ gleich $l(x)$ ist. Es is evident, daß jedes Produkt $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ mindestens einem minimalen reduzierten Produkt gleich ist. Endlich nennen wir ein Produkt $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ ein geordnetes Produkt, wenn $\alpha < \beta < \dots < \varrho$ gilt.

Es ist klar, daß das minimale reduzierte Produkt $h_\alpha \dots h_\gamma h_\delta \dots h_\varrho$ durch die Umformungen $h_\gamma h_\delta = h_\delta (h_\delta^{-1} h_\gamma h_\delta) = h_\delta h_{\gamma'}$ und $h_\gamma h_\delta = (h_\gamma h_\delta h_\gamma^{-1}) h_\gamma = h_{\delta'} h_\gamma$ wieder in ein minimales reduziertes Produkt übergeht. Bequemlichkeitshalber nennen wir diese Umformungen die Transformationen von minimalen reduzierten Produkten.

Es sei $x = h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ ein minimales reduziertes Produkt. Wir werden beweisen, daß man durch die gesagten Transformationen ein minimales reduziertes Produkt in ein (minimales reduziertes) geordnetes Produkt umformen kann. Es ist klar, daß wir hierdurch auch schon den Satz bewiesen haben werden.

Den Beweis werden wir durch Induktion nach $l(x)$ durchführen. Ist $l(x) = 1$, so ist die Behauptung trivial. Es sei $l(x) > 1$. Es sei $M(x)$ die Menge aller minimalen reduzierten Produkte, die aus $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ durch Transformationen entstehen. Wir betrachten in $M(x)$ ein Produkt $h_{\alpha'} h_{\beta'} \dots h_{\varrho'}$, welches den kleinsten in $M(x)$ überhaupt vorkommenden Index enthält. Wir können annehmen, daß α' dieser kleinste Index ist, und setzen $x = h_{\alpha'} y$ $(y = h_{\beta'} \dots h_{\varrho'})$. Dann ist $l(y) < l(x)$, also hat y nach der Induktionsannahme eine (minimale, reduzierte) geordnete Produktdarstellung $y = h_{\beta''} \dots h_{\varrho''}$, welche durch Transformationen aus $h_{\beta'} \dots h_{\varrho'}$ entsteht. Es ist klar, daß alle Indizes in $h_{\beta''} \dots h_{\varrho''}$ größer als α' ist. Folglich ist $x = h_{\alpha'} h_{\beta''} \dots h_{\varrho''}$ ein geordnetes Produkt. Somit ist der Satz bewiesen.

Man bezeichne das Produkt $\prod_\chi H_\chi$ mit $\bar{H}$.

Satz 2. *Ist G eine nichtnilpotente endliche Gruppe, so hat G eine nilpotente Untergruppe H mit der Eigenschaft $\bar{H} = G$.*

Beweis. Der Beweis geschieht mit Induktion nach der Ordnung der Gruppe. Ist jede maximale Untergruppe von G ein Normalteiler von G, dann is G nilpotent (dies folgt einfach aus einem bekannten Satz von H. Wielandt [3]), was unserer Annahme über G widerspricht. Daher hat G eine nicht normale maximale Untergruppe M. Ist M nilpotent, so können wir $H = M$ nehmen. Andernfalls enthält M nach Induktionsannahme eine nilpotente Untergruppe H mit der Eigenschaft $M = HH' \dots$, wo $H', \dots$ die Konjugierten von H in M sind. Es ist klar, daß $\bar{H} = G$ ist.

Wir bemerken, daß man im Satz 2 „nilpotent“ durch „Abelsch“ nicht ersetzen kann. Ein Gegenbeispiel liefert das direkte Produkt der Diedergruppe von der Ordnung 8 mit der symmetrischen Gruppe von der Ordnung 6.

Man kann leicht einsehen, daß eine Gruppe G dann und nur dann eine zyklische Untergruppe Z mit $\bar{Z} = G$ hat, wenn man die Gruppe G mit ihren eigentlichen Normalteilern nicht überdecken kann.

Literatur.

[1] H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **55** (1951), 1—7.

[2] N. Itô, On the factorisations of the linear fractional group $LF(2, p^m)$, *diese Acta*, **15** (1953), 79—84.

[3] H. Wielandt, Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **41** (1936), 281—282.

(*Eingegangen am 7. Juli 1955.*)